ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 126 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-211-217

УДК 517.937

Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators

Vasiliy I. FOMIN

Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Аннотация. В банаховом пространстве изучается линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами. Нахождение общего решения ЛНДУ сводится к построению общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ). Характеристическое операторное уравнение для ЛОДУ рассматривается в банаховой алгебре комплексных операторов. В общем случае, когда среди корней характеристического операторного уравнения имеются как действительные, так и комплексные операторные корни, указывается n-параметрическое семейство решений ЛОДУ. При построении этого семейства используются операторные функции e^{At}, $\sin Bt$, $\cos Bt$ действительного аргумента $t \in [0, \infty)$. Выясняются условия, при которых данное семейство решений является общим решением ЛОДУ. В случае, когда характеристическое операторное уравнение имеет простые действительные операторные корни и простые чисто мнимые операторные корни, указан конкретный вид таких условий. В частности, эти корни должны коммутировать с операторными коэффициентами ЛОДУ. Кроме того, они должны коммутировать между собой. При доказательстве соответствующего утверждения применяется операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве

Ключевые слова: комплексный оператор; действительный оператор; чисто мнимый оператор; характеристический операторный полином; семейство решений; задача Коши; операторный определитель

Для цитирования: *Фомин В.И.* Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 211–217. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-211-217.

Abstract. A linear inhomogeneous differential equation (LIDE) of the nth order with constant bounded operator coefficients is studied in Banach space. Finding a general solution of LIDE is reduced to the construction of a general solution to the corresponding linear homogeneous differential equation (LHDE). Characteristic operator equation for LHDE is considered in the Banach algebra of complex operators. In the general case, when both real and complex operator roots are among the roots of the characteristic operator equation, the n-parametric family of solutions to LHDE is indicated. Operator functions e^{At}, $sinBt$, $cosBt$ of real argument $t \in [0,\infty)$ are used when building this family. The conditions under which this family of solutions form a general solution to LHDE are clarified. In the case when the characteristic operator equation has simple real operator roots and simple pure imaginary operator roots, a specific form of such conditions is indicated. In particular, these roots must commute with LHDE operator coefficients. In addition, they must commute with each other. In proving the corresponding assertion, the Cramer operator-vector rule for solving systems of linear vector equations in a Banach space is applied

Keywords: complex operator; real operator; pure imaginary operator; characteristic operator polynomial; family of solutions; Cauchy problem; operator determinant

For citation: Fomin V.I. Ob obshchem reshenii linejnogo odnorodnogo differencial'nogo uravneniya v banahovom prostranstve v sluchae kompleksnyh harakteristicheskih operatorov [About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 211–217. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-211-217. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + H_1 y^{(n-1)} + \ldots + H_{n-1} y' + H_n y = f(t), \quad 0 \le t < \infty, \tag{0.1}$$

где $H_i \in L(E)$, $i = \overline{1;n}$; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $f(t) \in C([0,\infty); E)$; $C([0,\infty)E)$ — нормированное пространство непрерывных функций, действующих из $[0,\infty)$ в E. Известно [1], что общее решение уравнения (0.1) имеет вид $y = y_{0,0} + y_*$, где $y_{0,0}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + H_1 y^{(n-1)} + \ldots + H_{n-1} y' + H_n y = 0, \quad 0 \le t < \infty, \tag{0.2}$$

y_* — частное решение неоднородного уравнения (0.1). Задача о нахождении частного решения y_* решена: в случае, когда правая часть $f(t)$ уравнения (0.1) имеет общий вид, y_* найдено методом вариации произвольных постоянных в работе [1]; в случае, когда $f(t)$ имеет специальный вид, y_* получено методом неопределённых коэффициентов в работе [2]. Структура общего решения уравнения (0.2) определяется видом его характеристических операторов, т. е. корней характеристического операторного уравнения

$$P(Z) = O, \tag{0.3}$$

где $P(Z) = Z^n + H_1 Z^{n-1} + \ldots + H_{n-1} Z + H_n$ — характеристический операторный полином уравнения (0.2). Уравнение (0.3) рассматривается в банаховой алгебре комплексных операторов [3]

$$C_{L(E)} = [L(E)]^2 = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) | A, B \in L(E)\},$$

которую удобно представить в виде

$$C_{L(E)} = \{Z = A + \mathrm{I}B | A, B \in L(E)\},$$

где $\mathrm{I} = (O, I)$ — мнимая операторная единица. В случае $B = O$ операторы вида $Z = A$ называются действительными. В случае $A = O$, $B \neq O$ операторы вида $Z = \mathrm{I}B$ называются чисто мнимыми. Общее решение $y_{0,0}$ уравнения (0.2) найдено в работе [1] в случае, когда полином $P(Z)$ имеет n различных действительных корней $Z_1 = \Lambda_1, \ldots, Z_n = \Lambda_n$; в работе [4] в случае, когда $P(Z)$ имеет p действительных корней $Z_1 = \Lambda_1, \ldots, Z_p = \Lambda_p$ с кратностями соответственно $r_1, \ldots, r_p$ $(r_1 + \ldots + r_p = n)$. В настоящей работе изучается структура общего решения уравнения (0.2) в случае, когда среди корней характеристического операторного полинома $P(Z)$ имеются комплексные корни с мнимой частью, отличной от нуля.

1. Основные понятия

Пусть характеристический операторный полином $P(Z)$ уравнения (0.2) имеет p действительных операторных корней $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ с кратностями соответственно $r_1, \ldots, r_p$ и q пар комплексно сопряжённых операторных корней $Z_1 = A_1 + \mathrm{I}B_1$, $\bar{Z}_1 = A_1 - \mathrm{I}B_1, \ldots,$ $Z_q = A_q + \mathrm{I}B_q$, $\bar{Z}_q = A_q - \mathrm{I}B_q$ с кратностями соответственно $s_1, \ldots, s_q$, причём $r_1 + \ldots + r_p + 2(s_1 + \ldots + s_q) = n$.

Известно [5], что в этом случае при выполнении условия

$$H_k \Lambda_i = \Lambda_i H_k, \quad H_k Z_j = Z_j H_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q, \tag{1.1}$$

уравнение (0.2) имеет n-параметрическое семейство решений

$$y = \sum_{i=1}^{p} e^{\Lambda_i t} \sum_{k=1}^{r_i} t^{k-1} w_{ik} + \sum_{j=1}^{q} e^{A_j t} \cos B_j t \sum_{m=1}^{s_j} t^{m-1} x_{jm} + \sum_{j=1}^{q} e^{A_j t} \sin B_j t \sum_{m=1}^{s_j} t^{m-1} z_{jm}, \tag{1.2}$$

где w_{ik}, x_{jm}, z_{jm} $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq k \leq r_i,\ 1 \leq j \leq q,\ 1 \leq m \leq s_j)$ — произвольные элементы из E (свободные параметры).

Семейство решений (1.2) уравнения (0.2) будет общим решением этого уравнения, если при любом фиксированном наборе начальных значений $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ решение задачи Коши для уравнения (0.2) с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.3}$$

принадлежит семейству (1.2).

2. Основные результаты

Выяснение условий, при которых формула (1.2) задаёт $y_{0,0}$, в общем случае затруднительно из-за громоздких выражений для $y^{(m)}(1 \le m \le n-1)$. Ограничимся рассмотрением следующего простейшего случая.

Пусть характеристический операторный полином $P(Z)$ уравнения (0.2) имеет p простых действительных корней $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ и q пар простых чисто мнимых сопряжённых корней $Z_1 = \mathrm{I}B_1$, $\bar{Z}_1 = -\mathrm{I}B_1, \ldots, Z_q = \mathrm{I}B_q$, $\bar{Z}_q = -\mathrm{I}B_q$, при этом $p + 2q = n$. Пусть выполняется условие (1.1), т. е.

$$H_k\,\Lambda_i = \Lambda_i\,H_k, \quad H_k\,B_j = B_j\,H_k, \quad 1 \le k \le n, \quad 1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q. \tag{2.1}$$

Тогда, согласно формуле (1.2), уравнение (0.2) имеет n-параметрическое семейство решений

$$y = \sum_{i=1}^{p} e^{\Lambda_i t} w_i + \sum_{j=1}^{q} (\cos B_j t) x_j + \sum_{j=1}^{q} (\sin B_j t) z_j, \tag{2.2}$$

где w_i, x_j, z_j $(1 \le i \le p, \ 1 \le j \le q)$ — произвольные элементы из E (свободные параметры).

Выясним, при каких условиях решение задачи Коши (0.2), (1.3) при любом фиксированном наборе начальных значений $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ принадлежит семейству решений (2.2). Для любого $m \in N$

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{p} \left(e^{\Lambda_i t} w_i\right)^{(m)} + \sum_{j=1}^{q} [(\cos B_j t) x_j]^{(m)} + \sum_{j=1}^{q} [(\sin B_j t) z_j]^{(m)}. \tag{2.3}$$

При $A, B \in L(E)$ для операторных функций

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k}; \quad \cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} B^{2k}}{(2k)!}; \quad \sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{2.4}$$

справедливы формулы

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}, \quad (\cos Bt)' = -B \sin Bt, \quad (\sin Bt)' = B \cos Bt. \tag{2.5}$$

В силу равенств (2.5)

$$\left(e^{At}\right)^{(m)} = A^m e^{At}; \tag{2.6}$$

$$(\cos Bt)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^l B^m \sin Bt, m = 2l-1, \\ (-1)^l B^m \cos Bt, m = 2l; \end{cases} \tag{2.7}$$

$$(\sin Bt)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{l+1} B^m \cos Bt, m = 2l-1, \\ (-1)^l B^m \sin Bt, m = 2l. \end{cases} \tag{2.8}$$

В силу формул (2.6)–(2.8) равенство (2.3) принимает следующий вид: при $m = 2l-1$

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i^m e^{\Lambda_i t} w_i + \sum_{j=1}^{q} (-1)^l B_j^m (\sin B_j t) x_j + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{l+1} B_j^m (\cos B_j t) z_j; \tag{2.9}$$

при $m = 2l$

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i^m e^{\Lambda_i t} w_i + \sum_{j=1}^{q} (-1)^l B_j^m (\cos B_j t) x_j + \sum_{j=1}^{q} (-1)^l B_j^m (\sin B_j t) z_j. \tag{2.10}$$

Заметим, что

$$e^{At}\big|_{t=0} = I, \quad \cos Bt|_{t=0} = I, \quad \sin Bt|_{t=0} = O. \tag{2.11}$$

Пусть, для определённости, порядок n уравнения (0.2) нечётен (случай чётного n рассматривается аналогично). Тогда в силу соотношений (2.2), (2.9)–(2.11) начальные условия (1.3) принимают вид

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{p} w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} x_j = y_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} B_j z_j = y_0', \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^2 w_i - \sum\limits_{j=1}^{q} B_j^2 x_j = y_0'', \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^3 w_i - \sum\limits_{j=1}^{q} B_j^3 z_j = y_0''', \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^4 w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} B_j^4 x_j = y_0^{(4)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^{2l-1} w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^{l+1} B_j^{2l-1} z_j = y_0^{(2l-1)}, \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^{2l} w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^l B_j^{2l} x_j = y_0^{(2l)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^{n-2} w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^{\frac{n+1}{2}} B_j^{n-2} z_j = y_0^{(n-2)}, \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i^{n-1} w_i + \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_j^{n-1} x_j = y_0^{(n-1)}. \end{array} \tag{2.12}$$

Система (2.12) — это система линейных векторных уравнений относительно неизвестных

$$w_1, \dots, w_p, \quad x_1, \dots, x_q, \quad z_1, \dots, z_q. \tag{2.13}$$

Пусть выполняются следующие условия

$$\Lambda_i\,\Lambda_s = \Lambda_s\,\Lambda_i, \quad 1 \le i, s \le p; \tag{2.14}$$

$$B_j\,B_k = B_k\,B_j, \quad 1 \le j, k \le q, \tag{2.15}$$

$$\Lambda_i\,B_j = B_j\,\Lambda_i, \quad 1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q. \tag{2.16}$$

Тогда операторные коэффициенты системы уравнений (2.12) коммутируют между собой. Следовательно, можно рассмотреть операторный определитель системы (2.12), определяемый по известной формуле из [1]: для $A_{i,j} \in L(E)$, $1 \le i, j \le n$, удовлетворяющих условию $A_{ij}\,A_{km} = A_{km}\,A_{ij}$, $\forall\ 1 \le i, j, k, m \le n$,

$$\Delta = \det(A_{ij})_{i,j=1}^{n} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in P_n} (-1)^{\varphi(j_1, j_2, \dots, j_n)} A_{1j_1} A_{2j_2}, \ \dots, \ A_{nj_n}; \tag{2.17}$$

где P_n — множество перестановок индексов $1, 2, \dots, n$, $\varphi(j_1, j_2, \ \dots, \ j_n)$ — число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \ \dots, \ j_n)$. Пусть операторный определитель Δ системы уравнений (2.12) имеет ограниченный обратный:

$$\exists \Delta^{-1} \in L(E). \tag{2.18}$$

Тогда система (2.12) имеет единственное решение, которое находится по операторно-векторному правилу Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве [1]. Таким образом, решение задачи Коши (0.2), (1.3) задаётся формулой (2.2) при значениях параметров, равных компонентам решения системы уравнений (2.12). Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть характеристический полином $P(Z)$ уравнения (0.2) имеет p простых действительных корней $\Lambda_1, \ \dots, \ \Lambda_p$ и q пар простых чисто мнимых сопряжённых корней $Z_1 = \mathrm{I}B_1, \bar{Z}_1 = -\mathrm{I}B_1, \ \dots, \ Z_q = \mathrm{I}B_q, \bar{Z}_q = -\mathrm{I}B_q$, при этом $p + 2q = n$. Тогда при выполнении условий (2.1), (2.14)–(2.18) общее решение уравнения (0.2) в случае нечётности n задаётся формулой (2.2).*

Результаты данной работы анонсированы в [6].

Список литературы

[1] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:5 (2005), 656–660.

[2] В. И. Фомин, “О линейном дифференциальном уравнении n-го порядка в банаховом пространстве со специальной правой частью”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:10 (2009), 1518–1520.

[3] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823.

[4] В. И. Фомин, “О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **43**:5 (2007), 710–713.

[5] В. И. Фомин, “Об одном семействе решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*, **6**:42 (2018), 382–384.

[6] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2019), Материалы Международной конференции, Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2019, 271–273.

References

[1] V. I. Fomin, “On the general solution of a linear nth-order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space”, *Differential Equations*, **41**:5 (2005), 687–692.

[2] V. I. Fomin, “On the nth-order linear differential equation in a Banach space with special right part”, *Differential Equations*, **45**:10 (2009), 1554–1556.

[3] V. I. Fomin, “About a complex operator Banach algebra”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823 (In Russian).

[4] V. I. Fomin, “On the case of multiple roots of the characteristic operator polynomial of an nth-order linear homogeneous differential equation in a Banach space”, *Differential Equations*, **43**:5 (2007), 732–735.

[5] V. I. Fomin, “About a solutions family of a linear homogeneous differential equation of the n-th order in a Banach space”, *Actual Areas of Research of the 21th Century: Theory and Practice*, **6**:42 (2018), 382–384 (In Russian).

[6] V. I. Fomin, “About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Modern Methods of the Theory of Functions and Related Problems*, Voronezh Winter Mathematical School (Voronezh, January 28 – February 2, 2019), Materials of the International Conference, VSU Publishing House, Voronezh, 2019, 271–273 (In Russian).

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 25.02.2019 г.
Поступила после рецензирования 22.04.2019 г.
Принята к публикации 20.05.2019 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Technical Mechanic and Machine Part Department. Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Received 25 February 2019
Reviewed 22 April 2019
Accepted for press 20 May 2019